1，设 G 是 p^k(p 是素数)阶循环群，试证明 pG 是 p^{k-1}阶循环群

证明: 因为 G 是 p^k阶循环群，所以 $G\cong Z_{p^k}$，

从而 $pG\cong pZ_{p^k}=\{\overline{0}，\overline{p}，\overline{p\times 2}，\cdots，\overline{p\times(p^{k-1}-1)}\}$，

作映射φ: $Z_{p^{k-1}}\to pZ_{p^k}$，$\overline{i}\to\overline{p\times i}$，则显然$\varphi$是同构映射，

故$Z_{p^{k-1}}\cong pG$，从而，pG 是p^{k-1}阶循环群，

2，分别给出 45，48 和 144 阶交换群的所有同构类

解: 45 阶交换群的同构类为

$Z_9\oplus Z_5$，

$Z_3\oplus Z_3\oplus Z_5$，

48 阶交换群的同构类为

$Z_{16}\oplus Z_3$，

$Z_8\oplus Z_2\oplus Z_3$，

$Z_4\oplus Z_4\oplus Z_3$，

$Z_4\oplus Z_2\oplus Z_2\oplus Z_3$，

$Z_2\oplus Z_2\oplus Z_2\oplus Z_2\oplus Z_3$，

144 阶交换群的同构类为

$Z_{16}\oplus Z_9$，

$Z_{16}\oplus Z_3\oplus Z_3$，

$Z_8\oplus Z_2\oplus Z_9$，

$Z_4\oplus Z_4\oplus Z_9$，

$Z_8\oplus Z_2\oplus Z_3\oplus Z_3$,

$Z_4\oplus Z_4\oplus Z_3\oplus Z_3$，

$Z_4\oplus Z_2\oplus Z_2\oplus Z_9$，

$Z_4\oplus Z_2\oplus Z_2\oplus Z_3\oplus Z_3$，

$Z_2\oplus Z_2\oplus Z_2\oplus Z_2\oplus Z_9$，

$Z_2\oplus Z_2\oplus Z_2\oplus Z_2\oplus Z_3\oplus Z_3$，

3，决定所有 6 阶群的同构类，

解: 若 G 是交换群，则 $G\cong Z_2\oplus Z_3$，即 $G\cong Z_6$，若 G 不是交换群，则 $G\cong S_3$，

4，给出 p^2(p 是素数)阶群的所有同构类，

解: 因为 p^2 阶群为交换群，从而 p^2 阶群有两类，Z_{p^2} 和 $Z_p\oplus Z_p$

5，证明 15 阶群是交换群，从而是循环群，

证明 1: 设 G 是 15 阶群，则 G 的 3 阶、5 阶子群都各只有一个，

因而它们是 G 的正规子群，分别设为$\langle a\rangle$和$\langle b\rangle$，易知$\langle a\rangle\cap\langle b\rangle=\{e\}$，

由 $aba^{-1}b^{-1}$ 属于$(\langle a\rangle\cap\langle b\rangle)$可知 $ab=ba$，这说明 G 是交换群，

从而 $G\cong Z_{15}$ 是循环群

证明 2: 因为 $15=3\times5$，而 $3\nmid4$，$5\nmid2$，

故根据[习题 2.8 题 4]可知 15 阶群是循环群，

6，设正整数 m 与 n 互素，证明 $Z_m\oplus Z_n$ 是循环群，且 $Z_m\oplus Z_n\cong Z_{mn}$，

证明: 因为 m 与 n 互素可知 $Z_m\times Z_n$ 是 mn 阶循环群，所以 $Z_m\oplus Z_n\cong Z_{mn}$，

7，设 G 是有限群，H 是 G 的一个西罗 p−子群，试证明 $N_G(N_G(H))=N_G(H)$，

证明: 对属于 $N_G(N_G(H))$的任意 g，有 $gN_G(H)g^{-1}=N_G(H)$，

又因 H 包含于 $N_G(H)$，从而 gHg^{-1} 包含于 $N_G(H)$，

令 $gHg^{-1}=K$，则 H，K 是 $N_G(H)$中的西罗 p−子群，那么 H 与 K 共轭，

即存在属于 $N_G(H)$的 g_0，使得 $K=g_0Hg_0^{-1}=H$，

所以 $gHg^{-1}=H$，即 g 属于 $N_G(H)$，因此 $N_G({}_GN(H))$包含于 $N_G(H)$，

又因 $N_G(H)$包含于 $N_G(N_G(H))$，故 $N_G(H)=N_G(N_G(H))$，

习题 1 给出克莱因四元群的直和分解与初等因子组，

解: 令 $K_4=\{e,a,b,c\}$，则 $K_4=\langle a\rangle\times\langle b\rangle=\langle b\rangle\times\langle c\rangle=\langle c\rangle\times\langle a\rangle$，初等因子组为$\{2,2\}$

习题 2 设 G 是 n 阶交换群，m 是 n 的正因数，证明 G 有 m 阶子群，

证明: 根据有限交换群可以表示为循环群直和的性质

及拉格朗日定理的逆定理对于循环群成立，即可得证，

习题 3 分别求 75 和 360 的初等因子组和不变因子组，

解: $75=3\times5^2$,

初等因子组为$\{3,5^2\}$, $\{3,5,5\}$,

不变因子组为$\{75\}$, $\{15,5\}$,

$360=2^3\times3^2\times5$,

初等因子组为

$\{2^3,3^2,5\}$, $\{2^2,2,3^2,5\}$, $\{2,2,2,3^2,5\}$,

$\{2^3,2,3,3,5\}$, $\{2^2,2,3,3,5\}$, $\{2,2,2,3,3,5\}$

不变因子组为

$\{360\}$, $\{180,2\}$, $\{90,2,2\}$, $\{120,3\}$, $\{60,6\}$, $\{30,6,2\}$,

习题 4 求 28 阶交换群的所有同构类

解: 所谓求 n 阶交换群的所有同构类，

即按照群的同构关系将群分类，在每类中取一个代表元，

即可得到所有互不同构的 n 阶交换群，称其为 n 阶交换群的所有同构类，

有限交换群可以表示成循环群的直和的形式，

我们将 n 分解成素因子幂的形式(素因子可以相同)，即可得到初等因子组，

每个初等因子组可以决定一个 n 阶交换群，

因此，初等因子组的个数决定了同构类的个数，

将 28 写成素因子幂的形式，则初等因子组为$\{2^2,7\}$, $\{2,2,7\}$,

28 阶交换群的同构类有 $Z_4\oplus Z_7$, $Z_2\oplus Z_2\oplus Z_7$

利用初等因子组可以给出不变因子组$\{2^2\times7\}$, $\{2\times7,2\}$

由不变因子组也可以给出同构类 Z_{28}, $Z_{14}\oplus Z_2$

在求同构类时，

或按照初等因子组给出同构类，或按照不变因子组给出同构类即可，

习题 5 求 504 阶交换群的所有同构类，

解: $504=2^3\times3^2\times7$，

初等因子组为，

$\{2^3,3^2,7\}$，$\{2^2,2,3^2,7\}$，$\{2,2,2,3^2,7\}$，

$\{2^3,3,3,7\}$，$\{2^2,2,3,3,7\}$，$\{2,2,2,3,3,7\}$

则 504 阶交换群的所有同构类为

$Z_8\oplus Z_9\oplus Z_7$，

$Z_4\oplus Z_2\oplus Z_9\oplus Z_7$，

$Z_8\oplus Z_3\oplus Z_3\oplus Z_7$，

$Z_2\oplus Z_2\oplus Z_2\oplus Z_9\oplus Z_7$，

$Z_4\oplus Z_2\oplus Z_3\oplus Z_3\oplus Z_7$，

$Z_2\oplus Z_2\oplus Z_2\oplus Z_3\oplus Z_3\oplus Z_7$