1，试证明所有形如$\begin{pmatrix}1 & a & b\\ 0 & 1 & c\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$的 3×3 实矩阵

组成的集合关于矩阵的乘法运算是群

证明: 因为单位上三角形矩阵的乘法运算封闭，

且每个单位上三角形矩阵的逆矩阵也是单位上三角形矩阵，

因此所有 3×3 单位上三角形实矩阵关于矩阵的乘法构成群，

2，设 G 是交换群，m 是一个整数，令 $G^{(m)}=\{a^m|a\in G|$ 和 $G_{(m)}=\{a|a^m=e\}$，

试证明 $G^{(m)}$和 $G_{(m)}$都是 G 的子群，

证明: 因 G 的单位元在 $G^{(m)}$和 $G_{(m)}$中，所以它们是非空集合，

对属于 $G^{(m)}$的任意 a，b，存在有属于 G 的 c，d，使得 $a=c^m$，$b=d^m$，

则属于 $G^{(m)}$的 $ab^{-1}=c^m(d^m)^{-1}=(cd^{-1})^m$, 即 $G^{(m)}$是 G 的子群，

对属于 $G_{(m)}$的任意 a，b，$(ab^{-1})^m=a^m(b^m)^{-1}=e$，$ab^{-1}$ 属于 $G_{(m)}$，即 $G_{(m)}$是 G 的子群

3，设 H 是群 G 的子群，试证明对属于 G 的任意 g

$gHg^{-1}=\{ghg^{-1}\mid h\in H\}$是 G 的子群，(称 gHg^{-1} 为 H 的共轭子群)，

证明: 显然 gHg^{-1} 非空且对属于 gHg^{-1} 的任意 gh_1g^{-1}，gh_2g^{-1}，

有$(gh_1g^{-1})(gh_2g^{-1})^{-1}=gh_1g^{-1}gh_2^{-1}g^{-1}=gh_1h_2^{-1}g^{-1}$，属于 gHg^{-1}

故 gHg^{-1} 是 G 的子群，

4，当 $n\geqslant 4$ 时，试证明交错群 A_n 不是交换群，而交错群 A_2 和 A_3 是交换群，

解: $(123)(134)\neq(134)(123)$，所以 A_n 不是交换群，$(n\geqslant 4)$

$A_3=\{(1),(123),(132)\}$ 和 $A_2=\{(1)\}$是交换群，

5，设 $K=\{(1),(12)(34),(13)(24),(14)(23)\}$，试证明 K 是 S_4 的子群，

解: 令 $a=(12)(34)$，$b=(13)(24)$，$c=(14)(23)$，

则 $ab=c=ba$，$ac=b=ca$，$bc=a=cb$，$a^2=b^2=c^2=(1)$，故 K 是 S_4 的子群

6，设 H，K 是群 G 的两个真子群，请说明：

群 G 不能被它的两个真子群覆盖，即 G 不等于$(H\cup K)$，

证明： 反证，若 $G=(H\cup K)$，则 $H\cup K$ 是群，因此 H 包含于 K 或 K 包含于 H

若 H 包含于 K，则 $G=(H\cup K)=K$，这与 K 是真子群矛盾，

若 K 包含于 H，则 G 等于 H，这与 H 是真子群矛盾，

7，设 G 是有限交换群，H 和 K 是 G 的两个子群，

若$(H\cap K)=\{e\}$，试证明 HK 是 G 的子群，且$|HK|=|H||K|$，

证明： 因为 $HK=KH$，所以 HK 是 G 的子群，

若 $hh=h_1k_1$，则$h_1^{-1}h=k_1k^{-1}$属于$(H\cap K)$，从而 $h=h_1$，$k=k_1$，

所以$|HK|=|H||K|$，

8，在群$\{Z;+\}$中，设 d 是 m，n 的最大公因数，试证明$\langle\{m,n\}\rangle=\langle d\rangle$，

证明： $\langle d\rangle=\{dr|r\in Z\}$，$\langle\{m,n\}\rangle=\{ms+nt|s,t\in Z\}$，

因为 $d=(m,n)$，所以存在有属于 Z 的 k，l，使得 $d=mk+nl$，

因此 d 属于$\langle\{m,n\}\rangle$，$\langle d\rangle$包含于$\langle\{m,n\}\rangle$，

反之，由 $d|m$，$d|n$ 知 m 属于$\langle d\rangle$，n 属于$\langle d\rangle$，

因此$\langle\{m,n\}\rangle$包含于$\langle d\rangle$，故$\langle\{m,n\}\rangle=\langle d\rangle$，

9，试证明在群$\{Z;+\}$中，$\langle m\rangle=\langle n\rangle\Leftrightarrow m=\pm n$，

证明： 充分性，若 $m=\pm n$，则 m 属于$\langle n\rangle$，$\langle m\rangle$包含于$\langle n\rangle$，同理$\langle n\rangle$包含于$\langle m\rangle$，

必要性，若$\langle m\rangle=\langle n\rangle$，则 m 属于$\langle n\rangle$，从而 $n|m$，同理可知 $m|n$，因此 $m=\pm n$，

10，写出剩余类加法群$\{Z_3;+\}$和$\{Z_4;+\}$的每个元素生成的循环子群，

解： Z_3 中$\langle\overline{0}\rangle=\{\overline{0}\}$，$\langle\overline{1}\rangle=\{\overline{0},\overline{1},\overline{2}\}$，$\langle\overline{2}\rangle=\{\overline{0},\overline{1},\overline{2}\}$，

Z_4 中$\langle\overline{0}\rangle=\{\overline{0}\}$，$\langle\overline{1}\rangle=\{\overline{0},\overline{1},\overline{2},\overline{3}\}$，$\langle\overline{2}\rangle=\{\overline{0},\overline{2}\}$，$\langle\overline{3}\rangle=\{\overline{0},\overline{1},\overline{2},\overline{3}\}$，

11，写出三次对称群 S_3 的每个元素生成的循环子群，

解: $\langle(1)\rangle=\{(1)\}$，$\langle(12)\rangle=\{(1),(12)\}$，$\langle(13)\rangle=\{(1),(13)\}$，

$\langle(23)\rangle=\{(1),(23)\}$，$\langle(123)\rangle=\{(1),(123)(132)\}=\langle(123)\rangle$，

习题 1 证明 $SO_3=\{A\in SL_3(R)|\ A^TA=E_3\}$关于矩阵的乘法运算是群，

证明: 若 A，B 都属于 SO_3，

则 AB^{-1} 属于 $SL_3(R)$，$(AB^{-1})^TAB^{-1}=E_3$，即 AB^{-1} 属于 SO_3

所以 SO_3 关于矩阵的乘法运算是群，

习题 2 证明任何一个置换群的元素或全部是偶置换或奇偶置换各半，

证明: 交错群的元素全部是偶置换，

若置换群 G 中含有奇置换σ，设 G 中偶置换和奇置换的个数分别为 m，n，

一个奇置换与每个偶置换合成得到 m 个奇置换，则 $m\leqslant n$，

取一个奇置换与每个奇置换合成得到 n 个偶置换，则 $n\leqslant m$，因此 $m=n$

习题 3 在 S_3 中 $H=\{(12),(13)\}$，$K=\{(12),(23)\}$，$V=\{(123),(132)\}$，求 HV，KV

解: $HV=\{(23),(13),(12)\}$，$KV=\{(23),(13),(12)\}$，

注: 由 HV=KV，不能推出 H=K，但是，由 aH=aK，可以推出 H=K，

习题 4 证明群 G 的任意子群和 G 的中心的乘积仍是 G 的子群，

证明: 设 H 是 G 的子群，C 是 G 的中心，

对属于 H 的任意 h，h'，和对属于 C 的任意 c，c'，

有$(hc)(h'c')=hh'cc'$属于 HC，有$(hc)^{-1}=c^{-1}h^{-1}=h^{-1}c^{-1}$属于 HC

所以 HC 是 G 的子群，

习题 5 设 H 是群 G 的子群，a 属于 G，

试证明当且仅当 a 属于 H 时，aH 是 G 的子群，

证明: 若 a 属于 H，则等于 H 的 aH 是 G 的子群，

若 aH 是 G 的子群，则存在属于 H 的 h 使得 ah=e，进而 $a=h^{-1}$属于 H

习题 6 求交错群 A_3 在对称群 S_3 中的中心化子和正规化子，

解: 正规子群的正规化子是整个群，

中心化子为$C_{S_3}(A_3)=A_3$, 正规化子为$N_{S_3}(A_3)=S_3$,

习题 7 在群$\{Z;+\}$中，求子群$\langle n\rangle$在 Z 中的正规化子，

解: 交换群的子群的正规化子是整个群，$\langle n\rangle$在 Z 中的正规化子为 Z,

习题 8 群 G 能被它的三个真子群覆盖么?

解: 不能，例如整数加群 Z 的子群$\langle 3\rangle,\langle 5\rangle,\langle 7\rangle$不能覆盖 Z,

习题 9 求有理数加法群的子群$\langle\frac{1}{2}\rangle$和$\langle\frac{1}{2},\frac{1}{4}\rangle$的元素，

解: $\langle\frac{1}{2}\rangle=\left\{\frac{n}{2}\,\middle|\,n\in Z\right\}$，$\langle\frac{1}{2},\frac{1}{4}\rangle=\left\{\frac{n}{4}\,\middle|\,n\in Z\right\}$

习题 10 已知$\{Q^*;\bullet\}$是非零有理数关于数的乘法运算构成的群，

求其子群$\langle\frac{1}{2}\rangle$和$\langle\frac{1}{2},\frac{1}{4}\rangle$的元素，

解: $\langle\frac{1}{2}\rangle=\{2^n\mid n\in Z\}$, $\langle\frac{1}{2},\frac{1}{4}\rangle=\{2^n\mid n\in Z\}$

习题 11 在群$\{Z;+\}$中，求循环子群$\langle m\rangle+\langle n\rangle$的生成元，

解: 由[第二章例 2,8]知$\langle m\rangle+\langle n\rangle$是循环群，

设$\langle m\rangle+\langle n\rangle=\langle r\rangle$及 d 是 m,n 的最大公因数，

则存在有属于 Z 的 s,t，使得 $d=ms+nt$，即 d 属于$\langle r\rangle$,

所以$\langle d\rangle$包含于$\langle r\rangle$

因为 r 属于$(\langle m\rangle+\langle n\rangle)$，所以 $r=ma+nb$，进而 $d|r$,

所以$\langle r\rangle$包含于$\langle d\rangle$

得$\langle r\rangle=\langle d\rangle$，即 d 是$\langle m\rangle+\langle n\rangle$的生成元

习题 12 设 G 是阶大于 2 的群，

试证明若 G 的每个元素满足 $x^2=e$，则 G 有 4 阶子群，

证明: 易知 G 是交换群，设 e , a , b 是 G 的三个不同元素，其中 e 是 G 的单位元

则 e , a , b 生成的 G 的子群为$\{e, a, b, ab\}$，它是 4 阶子群，

习题 13 令$\langle 6\rangle$是群$\{Z; +\}$的子群，求$\langle 6\rangle$的所有子群及$\{Z; +\}$中包含$\langle 6\rangle$的子群

解: 在整数集合中，$\langle m\rangle$包含于$\langle n\rangle \Leftrightarrow n|m$，因此$\langle 6\rangle$的所有子群为$\langle 6t\rangle$，t 属于 N

Z 中包含$\langle 6\rangle$的子群有$\langle 1\rangle, \langle 2\rangle, \langle 3\rangle, \langle 6\rangle$，

习题 14 当 $n \geqslant 3$ 时，试证明$\{(123), (124), \cdots, (12n)\}$是 A_n 的生成集，

证明: 当$\{i, j, k\} \cap \{1, 2\} = \varnothing$时，$(ijk)=(12i)(12j)(12k)(12i)(12j)$，

且$(1i2)=(12i)(12i)$，$(12j)(1i2)=(1ij)$，$(1j2)(12i)=(2ij)$，

根据[第一章命题 2.1]知，A_n 可以由长度为 3 的轮换生成，

因此，A_n 可由$\{(123), (124), \cdots, (12n)\}$生成，

习题 15 试证明 $SL_2(Z)=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a,b,c,d \in Z, ad-bc=1\right\}$

关于矩阵的乘法运算是群且生成集为$\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right\}$

证明: 易知若 A , B 属于 $SL_2(Z)$, 则 AB 属于 $SL_2(Z)$,

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$是单位元 ，$\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$是$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$的逆元 ，

因此 $SL_2(Z)$关于矩阵的乘法运算是群 **，**

记 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $Q=B^{-1}AB^{-1}$, 则 $Q^2=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$,

令$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$属于 $SL_2(Z)$,

当 $a=0$ 或 $d=0$, $b=-c=\pm 1$ 时

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & d \end{pmatrix}=B^{d-1}AB^{-1}$, $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & d \end{pmatrix}=B^{1-d}A^{-1}B$

或$\begin{pmatrix} a & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}=B^{-1}AB^{a-1}$, $\begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=BA^{-1}B^{1-a}$

当 $b=0$ 或 $c=0$, $a=d=\pm 1$ 时

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}=B^{c}$, $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ c & -1 \end{pmatrix}=B^{-c}Q^2$ 或$\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=A^{b}$, $\begin{pmatrix} -1 & b \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=Q^2A^{-b}$

当 a , b , c , d 都不为零时 ，则 a , c 互素 ，不妨设$|a|<|c|$, $c=aq+r$, $0 \leqslant r<|a|$,

则$\begin{pmatrix} -q & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} r & d-bq \\ -a & -b \end{pmatrix}$

若 $r\neq 0$, 则继续使用带余除法 ，直至左上角位置元素为零 ，则可得证 ,