本节讨论两种特殊的理想，

即它能使商环具有便于我们了解和认识的代数结构: 整环和域，

定义 5.1 设 R 是非零交换环，I 是 R 的真理想，

如果对于 R 的任意一个包含 I 的理想 $J(I\subseteq J\subseteq R)$，必有 J=I 或 J=R，

则称 I 是 R 的极大理想，

定理 5.1 设 R 是非零的有 1 的交换环，I 是 R 的理想，

则当且仅当 R/I 是域时，I 是 R 的极大理想

证: 若 I 是 R 的极大理想，则 I 是 R 的真理想，即商环 R/I 是非零环，

由 R 是有 1 的交换环可知，R/I 是有 1 的交换环(R/I 的单位元为 1+I)，

欲证 R/I 是域，我们只需说明 R/I 的非零元是可逆元，

为此令 a 属于 R–I，那么由 I 是 R 的极大理想可知$\langle a\rangle+I=R$，

因为 R 是有 1 的交换环，所以存在属于 R 的 b，和属于 I 的 i，使得 1=ab+i，

从而$\overline{1}=\overline{ab+i}=\overline{a}\,\overline{b}$，即$\overline{a}$是可逆元，这就是说，R/I 确是一个域，

反之，若 R/I 是域，则由域至少含有两个元素可知，I 是 R 的真理想，

设 J 是 R 的真包含 I 的理想，则存在 a 属于 J–I，即$\overline{a}$是 R/I 的非零元，

根据 R/I 是域可知$\overline{a}$是可逆元，即存在$\overline{b}$，使得$\overline{a}\overline{b}=\overline{1}$，

从而 ab–1 属于 I 包含于 J，

但是，由于 a 属于 J，所以 ab 属于 J，从而 1 属于 J，也就是说，R=J，

因此，I 是 R 的极大理想，

例 5.1 证明在整数环 Z 中，当且仅当 n 是素数时，$\langle n\rangle$是极大理想(n＞1)，

证: 根据定理 5.1 有，当且仅当 n 是素数时，$Z_n=Z/\langle n\rangle$是域，

当且仅当 $Z/\langle n\rangle$是域时，$\langle n\rangle$是极大理想(n＞1)，

所以结论得证，

例 5.2 证明 $Z_{18}/\langle\overline{3}\rangle$是域

证: 由定理 5.1 可知，要证明 $Z_{18}/\langle\overline{3}\rangle$是域仅需指出$\langle\overline{3}\rangle$是 Z_{18} 的极大理想，

而

$\{\overline{0}\}$,

$\overline{2}Z_{18}=\{\overline{0}，\overline{2}，\overline{4}，\overline{6}，\overline{8}，\overline{10}，\overline{12}，\overline{14}，\overline{16}\}$,

$\overline{3}Z_{18}=\{\overline{0}，\overline{3}，\overline{6}，\overline{9}，\overline{12}，\overline{15}\}$,

$\overline{6}Z_{18}=\{\overline{0}，\overline{6}，\overline{12}\}$,

$\overline{9}Z_{18}=\{\overline{0}，\overline{9}\}$

和 Z_{18}

是 Z_{18} 的所有理想，

显然包含$\langle\overline{3}\rangle$的理想只有$\overline{3}Z_{18}$ 和 Z_{18}，所以$\langle\overline{3}\rangle$是 Z_{18} 的极大理想，

进而 $Z_{18}/\langle\overline{3}\rangle$是域，

例 5.3 由本章例 3.8 可知，$Z[i]/\langle 1+i\rangle=\{\overline{0}，\overline{1}\}$是域，

又因 Z[i]是有单位元的交换环

所以，根据定理 5.1 可知，$\langle 1+i\rangle$是 Z[i]的极大理想，

例 5.4 设 R[x]是实数域上的一元多项式环，

试证明 $I=\{f(x)\in R[x]\mid f(0)=0\}$是 R[x]的极大理想，

证: 因为映射$\varphi\colon R[x]\to R, f(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i \to a_0$是环的满同态, 并且 $\mathrm{Ker}\,\varphi=I$

所以，由环同态基本定理有 $R[x]/I\cong R$，因此，R[x]/I 是域，I 是 R[x]的极大理想

下面我们再研究能使商环成为整环的理想的性质和结构

定义 5.2 设 R 是非零交换环，I 是 R 的真理想，
如果对属于 R 的 a，b，由 ab 属于 I，可以推出 a 属于 I 或 b 属于 I，
则称 I 是 R 的素理想，

定理 5.2 若 R 是非零的有 1 的交换环，I 是 R 的理想，
则当且仅当 R/I 是整环时，I 是 R 的素理想，
证: 若 I 是 R 的素理想，则 I 是 R 的真理想，即 R/I 是非零环，
因为 R 是有 1 的交换环，所以 R/I 也是有 1 的交换环(R/I 的单位元是 1+I)，
欲证 R/I 是整环，我们仅需要指出 R/I 中没有零因子，
为此设$\bar{a}\bar{b}=\bar{0}$，则 ab 属于 I，
又因 I 是 R 的素理想，所以 a 属于 I 或 b 属于 I，即$\bar{a}=\bar{0}$或$\bar{b}=\bar{0}$，
因此，R/I 是无零因子环，进而，R/I 是整环，
反之，若 R/I 是整环，则 I 是 R 的真理想，
令 ab 属于 I，则$\bar{a}\bar{b}=\bar{0}$，
因为 R/I 是无零因子环，所以$\bar{a}=\bar{0}$或$\bar{b}=\bar{0}$，即 a 属于 I 或 b 属于 I，
于是，I 是 R 的素理想

例 5.5 证明在整数环 Z 中，当且仅当 n 是素数时，$\langle n\rangle(n>1)$是素理想，
证: 根据定理 5.2 可知，当且仅当 n 是素数时，$Z_n=Z/\langle n\rangle$是整环，
当且仅当 $Z/\langle n\rangle$是整环时，$\langle n\rangle(n>1)$是素理想，所以结论得证，

例 5.6 证明剩余类环 Z 的理想$\langle\overline{3}\rangle$是素理想，

证: 因为$\langle\overline{3}\rangle=\{\overline{0}，\overline{3}\}$，对属于 Z_6 的$\overline{a}$，$\overline{b}$，

若$\overline{a}\overline{b}$属于$\langle\overline{3}\rangle$，则存在属于 Z 的 t，使得$\overline{ab}=\overline{3t}$，

从而 $ab\equiv 3t(\mathrm{mod}\ 6)$，进而 $6|(ab-3t)$，

因为 3 是素数，所以 $3|a$ 或 $3|b$，即$\overline{a}$属于$\langle\overline{3}\rangle$或$\overline{b}$属于$\langle\overline{3}\rangle$，因此$\langle\overline{3}\rangle$是素理想，

例 5.7 试证明在高斯整环 Z[i]中，理想{0}是素理想，

证: 因为 Z[i]是整环，所以对属于 Z[i]的 a，b，

若 ab 属于{0}，则 a=0 或者 b=0，即{0}是素理想，

下面我们来看极大理想和素理想的关系，

从定理 5.1 和定理 5.2 容易看出，

当 R 是非零的有 1 的交换环时，极大理想是素理想，

从例 5.7 我们得到$\{0\}\subseteq\langle 1+i\rangle\subseteq Z[i]$，即素理想不一定是极大理想，

但是，当 R 是非零的有 1 的有限交换环时，

根据有限整环是域可知，素理想是极大理想，

另外，当 R 是主理想整环时，素理想和极大理想也是等价的，证明如下，

定理 5.3 设 R 是主理想整环，若 I 是 R 的非零理想，

则当且仅当 I 是 R 的极大理想时，I 是 R 的素理想，

证: 因为整环是非零的有 1 的交换环，

所以若 I 是 R 的极大理想，则 I 是 R 的素理想，

反之，若 I 是 R 的素理想，J 是 R 的包含 I 的理想，

因为 R 是主理想整环，所以可以设 $I=\langle a\rangle$，$J=\langle b\rangle$，

由$\langle a\rangle$包含于$\langle b\rangle$可知存在属于 R 的 c 使得 $a=bc$，

因为 I 是 R 的非零理想，所以 $a\neq0$，进而 $c\neq0$，

因为$\langle a\rangle$是 R 的素理想，所以由 $a=bc$ 可推出 b 属于$\langle a\rangle$或 c 属于$\langle a\rangle$，

若 b 属于$\langle a\rangle$，则$\langle b\rangle$包含于$\langle a\rangle$，即$\langle a\rangle=\langle b\rangle$，

若 c 属于$\langle a\rangle$，则存在属于 R 的 d 使得 $c=ad=bcd$，从而$(1-bd)c=0$，

由于 $c\neq0$，因此 $bd=1$，即 b 是可逆元，从而$\langle b\rangle=R$，

也就是说包含 I 的理想只有 I 和 R，因此，I 是 R 的极大理想，

注意，若 R 没有单位元，那么极大理想不一定是素理想，

例 5.8 设环 $R=2Z$，则 $I=4Z$ 是 R 的极大理想，但不是素理想，

证: 若设 J 是真包含 I 的 R 的理想，

则存在属于 Z 的 a，使得 2a 属于 J 且 2a 不属于 I，那么 2 与 a 互素，

从而存在整数 u，v，使得 $1=au+2v$，进而 $2=2au+4v$ 属于 $J+I$ 包含于 J，

因此，2Z 包含于 J，$J=R$，这就是说，I 是 R 的极大理想，

另外，因为 2 不属于 4Z，但是 $2\bullet2$ 属于 4Z，所以 I 不是 R 的素理想，