1，设$|E:F|=n$，属于 E 的α是 F 上的代数元，且$|F(\alpha):F|=m$，证明 $m|n$，

证明: $|E:F|=|E:F(\alpha)||F(\alpha):F|$，故 $m|n$，

2，设包含 F 的 E 是域的扩张，且$|E:F|$是素数，

试证明对属于 $E-F$ 的任意α，都有 $E=F(\alpha)$

证明: 因为$|E:F|=|E:F(\alpha)||F(\alpha):F|$，从而$|E:F(x)|=1$ 或$|F(\alpha):F|=1$，

若$|F(\alpha):F|=1$，则α属于 F 矛盾，因此$|E:F(\alpha)|=1$，故 $E=F(\alpha)$，

3，设 $K=Q(\sqrt[3]{2}，\sqrt[3]{2}i)$，证明$|K:Q(\sqrt[3]{2})|=2$，$|K:Q|=6$，

证明 1: 令 $f(x)=x^2+(\sqrt[3]{2})^2$，则 $f(x)$是$\sqrt[3]{2}i$ 在 $Q(\sqrt[3]{2})$上的极小多项式，

故$|K:Q(\sqrt[3]{2})|=2$，

而$\sqrt[3]{2}$在 Q 上的极小多项式为 $g(x)=x^3-2$，故$|Q(\sqrt[3]{2}):Q|=3$，

从而$|K:Q|=|K:Q(\sqrt[3]{2})||Q(\sqrt[3]{2}):Q|$，

证明 2: 首先说明 $Q(\sqrt[3]{2}，\sqrt[3]{2}i)=Q(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{2}i)$，

显然 x^3-2，x^3+2 分别是$\sqrt[3]{2}$，$\sqrt[3]{2}i$ 的极小多项式，

根分别为$\sqrt[3]{2}$，$\sqrt[3]{2}\omega$，$\sqrt[3]{2}\overline{\omega}$和$\sqrt[3]{2}i$，$\sqrt[3]{2}\omega i$，$\sqrt[3]{2}\overline{\omega}i$，由[第四章引理 3.1]得证，

令$\alpha=\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{2}i$，则$\alpha^3=2(1+i)^3=-4+4i$，从而有$(\alpha^3+4)^2=-16$，即$\alpha^6+8\alpha^3+32=0$

故α在 Q 上的极小多项式为 $f(x)=x^6+8x^2+32$，因此$|K:Q|=|Q(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{2}i):Q|=6$

又因$|K:Q|=|K:Q(\sqrt[3]{2})||Q(\sqrt[3]{2}):Q|$，而$\sqrt[3]{2}$在 Q 上的极小多项式为 $g(x)=x^3-2$，

故$|Q(\sqrt[3]{2}):Q|=3$，从而有$|K:Q(\sqrt[3]{2})|=2$，

4，求$|Q(\sqrt{2}，\sqrt{3}):Q|$及$|Q(\sqrt{5}+\sqrt{3}):Q(\sqrt{15})|$，

解: $Q(\sqrt{2}，\sqrt{3})=Q(\sqrt{2}+\sqrt{3})$，令$\alpha=\sqrt{2}+\sqrt{3}$，则$(\alpha-\sqrt{2})^2=3$，即$\alpha^2-1=2\sqrt{2}\alpha$，

从而$(\alpha^2-1)^2=8\alpha^2$，即$\alpha^4-10\alpha^2+1=0$，

故α在 Q 上的极小多项式为 $f(x)=x^4-10x^2+1$，因此$|Q(\sqrt{2}，\sqrt{3}):Q|=4$，

令$\beta=\sqrt{3}+\sqrt{5}$，则$(\beta-\sqrt{5})^2=3$，即$\beta^2+2=2\sqrt{5}\beta$，

从而有$(\beta^2+2)^2=20\beta^2$，即$\beta^4-16\beta^2+4=0$，

从而 x^4-16x^2+4 是β在 Q 上的极小多项式，故$|Q(\sqrt{3}+\sqrt{5}):Q|=4$，

又因$|Q(\sqrt{15}):Q|=2$，所以由$|Q(\sqrt{3}+\sqrt{5}):Q|=|Q(\sqrt{3}+\sqrt{5}):Q(\sqrt{15})||Q(\sqrt{15}):Q|$

可知$|Q(\sqrt{3}+\sqrt{5}):Q(\sqrt{15})|=2$，

5，设 E=F(S)，S 包含于 E 且 S 仅含 F 上的代数元，试证明 E 是 F 的代数扩张

证明: 对属于 E 的任意β，

存在有属于 S 的$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$，使得$\beta$属于 $F(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$

又因$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$为 F 的代数元，因此 $F(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$是 F 上的有限扩张，

从而是代数扩张，所以β是代数元，E 是 F 的代数扩张

6，证明若$\sqrt{a}+\sqrt{b}\neq 0$，则 $Q(\sqrt{a}，\sqrt{b})=Q(\sqrt{a}+\sqrt{b})$，其中任意 a，b 属于 Q，

证明: 若 $a=b$，则显然得证，

若 $a\neq b$，则因为$\sqrt{a}+\sqrt{b}$属于 $Q(\sqrt{a}+\sqrt{b})$，所以 $Q(\sqrt{a}，\sqrt{b})$包含 $Q(\sqrt{a}+\sqrt{b})$，

又因为$\sqrt{a}+\sqrt{b}$属于 $Q(\sqrt{a}+\sqrt{b})$，所以$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^{-1}=\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b}$属于 $Q(\sqrt{a}+\sqrt{b})$

从而$\sqrt{a}-\sqrt{b}$属于 $Q(\sqrt{a}+\sqrt{b})$，进而有$\sqrt{a}$，$\sqrt{b}$属于 $Q(\sqrt{a}+\sqrt{b})$，

从而 $Q(\sqrt{a}，\sqrt{b})$包含于 $Q(\sqrt{a}+\sqrt{b})$，故 $Q(\sqrt{a}，\sqrt{b})=Q(\sqrt{a}+\sqrt{b})$

7，求包含 Q 的扩张 Q($\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$，$\sqrt{5}$)的本原元，

解: 易知$\sqrt{2}+\sqrt{3}$为 Q($\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$)的一个本原元，

下证$\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$是 Q($\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$，$\sqrt{5}$)的一个本原元，

因为$\sqrt{2}+\sqrt{3}$在 Q 上的极小多项式为 $f(x)=x^4-10x+1$

$\sqrt{5}$在 Q 上的极小多项式为 $g(x)=x-5$，

则 $f(x)$，$g(x)$的所有根为$\pm\sqrt{2}\pm\sqrt{3}$，$\pm\sqrt{5}$

考虑方程 $x(-\sqrt{5}，-\sqrt{5})=(\sqrt{2}+\sqrt{3})-(\pm\sqrt{2}\pm\sqrt{3})$，

因为 1 不适合上面所有方程，取$\xi=\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$，

则ξ是 Q($\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$，$\sqrt{5}$)的一个本原元，

8，设 K⊇E⊇F 是域的扩张，

试证明若包含 F 的 K 是有限扩张，则包含 E 的 K 和包含 F 的 E 是有限扩张，

证明: 若包含 F 的 K 是有限扩张，

则存在有限个 F 上的代数元$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$也是 E 上的代数元，

使得 $K=F(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$

从而 $K=E(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$，由[第四乘定理 3.3(1)]可知包含 E 的 K 是有限扩张

因为 E 是域 F 上 K 的子空间，而包含 F 的 K 是有限扩张，

所以包含 F 的 E 是有限扩张，

9，设域 F，E，K 满足 $K\supseteq E\supseteq F$，且 $|E:F|=m$，

试证明若属于 K 的 α 是 F 上的 n 次代数元，且 $(m,n)=1$，

则 α 是 E 上的 n 次代数元

证明： 由题意知 α 是 E 上的代数元，

从而 $|E(\alpha):F|=|E(\alpha):E||E:F|$，即包含 F 的 $E(\alpha)$ 是有限扩张，

由已知可知，$|E(\alpha):F|=|E(\alpha):F(\alpha)|F(\alpha):F|=|E(\alpha):F(\alpha)|n$，

因为 $(m,n)=1$，所以 n 整除 $|E(\alpha):E|$，

因为属于 K 的 α 是 F 上的 n 次代数元且 E 包含 F，

所以 $|E(\alpha):E|\leqslant n$，故 $|E(\alpha):E|=n$，

习题 1 设 K 是域 F 的扩张，属于 K 的 α,β 都是 F 上的代数元，

假设 $|F(\alpha):F|$ 与 $|F(\beta):F|$ 互素，

试证明 $|F(\alpha,\beta):F|=|F(\alpha):F||F(\beta):F|$，

从而 α 在 F 上的极小多项式是 $F(\beta)$ 中的不可约多项式，

证明： 根据 $|F(\alpha):F||F(\alpha,\beta):F|$、$|F(\beta):F||F(\alpha,\beta):F|$ 及 $|F(\alpha):F|$ 与 $|F(\beta):F|$ 互素

得 $|F(\alpha):F||F(\beta):F||F(\alpha,\beta):F|$，

再由 $|F(\beta)(\alpha):F(\beta)|\leqslant|F(\alpha):F|$，

可知 $|F(\alpha,\beta):F|=|F(\beta)(\alpha):F(\beta)||F(\beta):F|\leqslant|F(\alpha):F||F(\beta):F|$

因此，$|F(\alpha,\beta):F|=|F(\alpha):F||F(\beta):F|$，

这也说明 $|F(\beta)(\alpha):F(\beta)|=|F(\alpha):F|$，

即 α 在 F 上的极小多项式是 $F(\beta)$ 中的不可约多项式

习题 2 将域 F 上多项式 $x^2-\alpha$ 的根记为 $\sqrt{2}$

试证明若 $|K:F|=2$，则存在 F 上不可约多项式 x^2-D，使得 $K=F(\sqrt{D})$，

证明： 取属于 $K-F$ 的 α，由 $|K:F|=2$ 知 α 是 F 上代数元，

设极小多项式为 $f(x)=x^2+ax+b$，

由 $f(\alpha)=\left(\alpha+\frac{a}{2}\right)^2+b-\frac{a^2}{4}=0$，可知 $\left(\alpha+\frac{a}{2}\right)^2$ 属于 F

令 $\alpha+\frac{a}{2}=\beta$，则 β 属于 $K-F$ 且 $x^2-\beta^2$ 为所求多项式，

习题 3 设α是多项式 x^3-3x-1 的一个实根，证明$\sqrt{2}$不属于 $Q(\alpha)$，

证明: 因为 x^3-3x-1 是有理数域上不可约多项式，

所以$|Q(\alpha):Q|=3$，而$|Q(\sqrt{2}):Q|=2$，

若$\sqrt{2}$属于 $Q(\alpha)$，则$|Q(2):Q|$整除$|Q(\alpha):Q|$，矛盾，

习题 4 设$|E:F|=n$，α属于 E，

试证明包含 $F(\alpha)$的 E 是有限扩张，且$|E:F|=|E:F(\alpha)||F(\alpha):F|$，

证明: 由于包含 F 的 E 是有限扩张，所以α是 F 上的代数元，

从而包含 F 的扩张 $F(\alpha)$是有限扩张，

因为$|E:F|=n$，故存在 F 上的代数元$\alpha_1,\cdots,\alpha_t$使得 $E=F(\alpha_1,\cdots,\alpha_t)$，

又因α属于 E，从而 $E=E(x)=F(\alpha_1,\cdots,\alpha_t)(\alpha)=F(\alpha)(\alpha_1,\cdots,\alpha_t)$

于是包含 $F(\alpha)$的 E 是有限扩张，$|E:F|=|E:F(\alpha)||F(\alpha):F|$，

习题 5 设α是 E 上的代数元，包含 F 的 E 是代数扩张，试证明α是 F 上的代数元

证明 1: 设α是 $E[x]$中非零多项式 $f(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0$的根，

则α是 $F(a_n,\cdots,a_1,a_0)$上的代数元，

因为包含 F 的 $F(a_n,\cdots,a_1,a_0)$是有限扩张，

从而包含 F 的 $F(a_n,\cdots,a_1,a_0,\alpha)$是有限扩张，于是$\alpha$是 F 上的代数元

证明 2: 因为α是 E 上的代数元，故包含 E 的 $E(\alpha)$是代数扩张，

又由于包含 F 的 E 是代数扩张，故包含 F 的 $E(\alpha)$是代数扩张，

因此α是 F 上的代数元，

习题 6 设 $E\supseteq K\supseteq F$ 是域的扩张，

则当且仅当包含 K 的 E 和包含 F 的 K 均是代数扩张时，包含 F 的 E 是代数扩张

证明: 必要性，由包含 F 的 E 是代数扩张知，E 中所有元素都是 F 上的代数元，

由包含 F 的 K 知 E 中所有元素也是 K 上的代数元，

因此包含 K 的 E 和包含 F 的 K 均是代数扩张，

充分性参见[第四章定理 3.4]，

习题 7 证明对任一包含 F 的扩张 K 存在唯一的 E : K⊇E⊇F，

使包含 F 的 E 是代数扩张，

使包含 E 的 K 是纯超越扩张(即 K 中除 E 中元素外没有 E 的代数元)

证明: 因为 K 是 F 的一个扩张，

考虑 K 中所有 F 的代数元形成的 K 的一个子域，用 E 表示，

显然 E 是 K 与 F 的中间域，并且是 K 中 F 的最大代数扩张，

这时 K 中除 E 的元素外，任意元都是 E 的超越元，

这是因为，若属于 K 的α是 E 上代数元，那么 E(α)是 E 的代数扩张，

而 E 是 F 的代数扩张，因此 E(α)是 F 的代数扩张，

故α是 F 的代数元，于是α属于 E，

所以，包含 E 的 K 是纯超越扩张，

E 的唯一性显然

习题 8 求属于 $Q(\sqrt{2}，\sqrt[3]{3})$的 u，使得 $Q(\sqrt{2}，\sqrt[3]{3})=Q(u)$，

解: 易知$\sqrt{2}$，$\sqrt[3]{3}$在 Q 上的极小多项式分别为 x^2-2，x^3-3，

极小多项式的根分别为$\alpha_1=\sqrt{2}$，$\alpha_2=-\sqrt{2}$和$\beta_1=\sqrt[3]{3}$，$\beta_2=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ ，$\beta_3=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

由$\beta_i-\beta_1\neq\alpha_1-\alpha_j$，$i\neq1$ 知 $u=\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$，

习题 9 设α是一个正有理数，证明 $Q(\sqrt{a}，i)=Q(\sqrt{a}+i)$，

证明: 显然有 $Q(\sqrt{a}，i)$包含 $Q(\sqrt{a}+i)$，

由于$\frac{1}{\sqrt{a}+1}$ 属于 $Q(\sqrt{a}+i)$，故$\sqrt{a}-i$ 属于 $Q(\sqrt{a}+i)$，

从而$\sqrt{a}$，i 属于 $Q(\sqrt{a}+i)$，$Q(\sqrt{a}，i)$包含于 $Q(\sqrt{a}+i)$，

习题 10 求下列域作为 Q–线性空间的一组基：

(1)$Q(\sqrt{2}, \sqrt{3})$，

(2)$Q(\sqrt{3}, i\omega)$，其中$\omega=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$

解: (1)因为$|Q(\sqrt{2}, \sqrt{3}):Q|=|Q(\sqrt{2}, \sqrt{3}):Q(\sqrt{2})||Q(\sqrt{2}):Q|=4$，

且 $Q(\sqrt{2}, \sqrt{3})=Q(\sqrt{2}+\sqrt{3})$，

所以 1，$\sqrt{2}+\sqrt{3}$，$(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2$，$(\sqrt{2}+\sqrt{3})^3$

为 $Q(\sqrt{2}, \sqrt{3})$作为 Q–线性空间的一组基

易知 1，$\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$，$\sqrt{6}$为另一组等价基，

(2)因为 $Q(\sqrt{3}, i\omega)=Q(\sqrt{3}, i)=Q(\sqrt{3}+i)$，

且由$\sqrt{3}$不属于 $Q(i)$知 $1<|Q(\sqrt{3}, i):Q(i)|\leqslant|Q(\sqrt{3}):Q|=2$，

即$|Q(\sqrt{3}, i):Q(i)|=2$，

所以$|Q(\sqrt{3}, i\omega):Q|=|Q(\sqrt{3}, i):Q(i)||Q(i):Q|=4$，

那么 $Q(\sqrt{3}, i\omega)$作为 Q–线性空间的一组基为 1，$\sqrt{3}+i$，$(\sqrt{3}+i)^2$，$(\sqrt{3}+i)^3$，

等价基为 1，i，$\sqrt{3}$，$\sqrt{-3}$，